10 07

TD 04

Exo 3 (X, d_X) espace complet, $Y \subseteq X$. $d_Y = d_X|_{Y \times Y}$.

On veut montrer que (Y, d_Y) est complet $\Leftrightarrow$ Y est d_X-fermé.

$\Rightarrow$ Y est fermé si (critère sequentiel) $\forall (y_n)_n$ suite ~~dans~~ d'éléments dans Y, qui est convergent dans X : $\lim_{n\to\infty} y_n = x$, alors $x \in Y$. Voici la preuve:

$(y_n)_n$ est une suite convergent dans X, donc elle est de Cauchy dans X. Comme d_Y est la restriction de d_X sur $Y \times Y$, alors $(y_n)_n$ est de Cauchy dans Y. Comme Y est complet, alors $(y_n)_n$ converge dans Y, c'est à dire que $x = \lim y_n \in Y$.

$\Leftarrow$ On veut montrer que si Y est fermé, alors (Y, d_Y) est complet.

Soit $(y_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments dans Y.

Mais alors $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy d'éléments dans (X, d_X), qui est complet. $\Rightarrow$ $(y_n)_n$ converge vers un point $x \in X$.

Comme Y est fermé dans X, on a de $x \in Y$.

On a donc montré que toute suite de Cauchy à valeurs dans Y converge à une valeur $\in Y$, c'est à dire que (Y, d_Y) est complet.

Exo 10 : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(somme des |·| des valeurs en vertical)

a) $\| A \|_1 = \frac{1}{3} \left\| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = \frac{1}{3} \max\{ \underbrace{|2|+|1|}_{3}, \underbrace{|1|+|1|}_{2} \} = 1.$

$\| A \|_\infty = \frac{1}{3} \left\| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = \frac{1}{3} \max\{ |2|+|1|, |1|+|1| \} = 1.$

(la norme est |·|-homogène)

En effet $A = {}^tA$, donc $\| A \|_\infty = \| {}^tA \|_1 = \| A \|_1 = 1$.

Comme $A = {}^tA$, ${}^tAA = A^2$, $\rho(A^2) = (\rho(A))^2$ et

$\| A \|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)} = \rho(A)$ (ne vaut que si A est symétrique)

On calcule les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = p(\lambda)$

$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. $\Rightarrow \rho\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \rho(A) = \frac{1}{3}\rho\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3+\sqrt{5}}{6} \; (<1)$.

b) $f(x,y) = \Big(\underbrace{\frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{9}\sin(3y)}_{\pi_1 \circ f =: g} ; \underbrace{\frac{1}{6}(x+y+\arctan(x-y))}_{\pi_2 \circ f =: h} \Big)$.

On remarque que : $t \mapsto \cos t$ est 1-lipschitzienne

$t \mapsto \sin t$ est 1-lipschitzienne

$t \mapsto \arctan t$ est 1-lipschitzienne.

En effet, la dérivée de $\cos t$ est $-\sin t$, dont le module est ≤ 1.

$\sin t$ " $\cos t$.

$\arctan t$ " $\frac{1}{1+t^2}$

(Voir TD2, Exo 9)

On a donc : $\left| g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2) \right| = \left| \frac{2}{3}(\cos x_1 - \cos x_2) + \frac{1}{9}(\sin(3y_1) - \sin(3y_2)) \right|$

$$\underset{\text{inég }\Delta}{\leq} \frac{2}{3}|\cos x_1 - \cos x_2| + \frac{1}{9}|\sin 3y_1 - \sin 3y_2| \underset{\text{1-Lip.}}{\leq} \frac{2}{3}|x_1 - x_2| + \frac{1}{9}|3y_1 - 3y_2|$$

$$= \frac{2}{3}|x_1-x_2| + \frac{1}{3}|y_1-y_2|$$

$$|h(x_1,y_1) - h(x_2,y_2)| = \left| \frac{1}{6}\left(x_1 + y_1 + \arctan(x_1-y_1) - x_2 - y_2 - \arctan(x_2-y_2)\right)\right|$$

$$\underset{\text{inég }\Delta}{\leq} \frac{1}{6}\Big(|x_1+y_1-x_2-y_2| + |\arctan(x_1-y_1) - \arctan(x_2-y_2)| \Big)$$

$$\underset{\substack{\text{1-Lip.}\\ \text{et inég }\Delta}}{\leq} \frac{1}{6}\Big(|x_1-x_2| + |y_1-y_2| + \underbrace{|x_1-y_1-x_2+y_2|}_{\leq\, |x_1-x_2|+|y_1-y_2|}\Big) \leq \frac{1}{3}|x_1-x_2| + \frac{1}{3}|y_1-y_2| .$$

c) ~~le point (b) nous dit que~~ On a vu dans (a) que $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\cancel{|g(\overset{p_1}{x_1,y_1}) - g(\overset{p_2}{x_2,y_2})| \; |h(p_1)-h(p_2)|}$ $\quad \|A\|_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{6} =: K < 1.$

Cela nous dit que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$ est K-lipschitzienne, par rapport à la norme 2,

c'est à dire que $\left\| A\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}\right\|_2 \leq K \cdot \left\|\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1-y_2\end{pmatrix}\right\|_2 .$

Or, $\| f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\|_2 = \left(|g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)|^2 + |h(x_1,y_1) - h(x_2,y_2)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\leq \left(\left(\frac{2}{3}|x_1-x_2| + \frac{1}{3}|y_1-y_2|\right)^2 + \left(\frac{1}{3}|x_1-x_2| + \frac{1}{3}|y_1-y_2|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\| A\begin{pmatrix} |x_1-x_2| \\ |y_1-y_2|\end{pmatrix}\right\| \leq$$

$$\leq K \cdot \left\| \begin{pmatrix} |x_1-x_2| \\ |y_1-y_2| \end{pmatrix}\right\|_2 = K \,\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_2 .$$

d) $\begin{cases} 6\cos x + \sin 3y = 9x \\ 5y - x - \arctan(x-y) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{9}\cos x + \frac{1}{9}\sin 3y = x \\ \frac{6y}{6} = \frac{12 + x + y + \arctan(x-y)}{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y) = f(x,y)$.

Dans le point (c) on a montré que f est une contraction dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, qui est un espace complet (car $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie). ~~Donc~~ Par le théorème du point fixe de Banach, $\exists! \underset{\mathbb{R}^2}{(x,y)} = f(x,y)$, et donc une unique solution du système.

e) Avec des raisonnements analogues au point (c), on aurait pu montrer que f est 1-lipschitzienne par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$, ou à la norme $\|\cdot\|_\infty$ (car $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 1$).

Donc avec cette estimation, on n'aurait pu conclure, car le théorème de Banach ne vaut pas si f est k-lip. avec $k \geq 1$. Exemple: $f(x) = x+1$ est 1-lipschitzienne dans $\mathbb{R}$, mais $Fix(f) = \emptyset$.

Remarque qui ne fait pas partie de la solution:

A priori, rien nous dit que avec une estimation plus précise, on peut montrer que f est k-lip. pour la norme $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$, $k<1$.

Dans ce cas, si $x_1 \sim x_2 \sim \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\cos x_1 - \cos x_2| \sim |x_1 - x_2|$.

Si de plus $x_1 - y_1 \sim x_2 - y_2 \sim 0$ (et donc $y_1 \sim y_2 \sim \frac{\pi}{2}$), on aurait

$|\arctan(x_1-y_1) - \arctan(x_2-y_2)| \sim |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

Qui entraînerait que $\|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\|_{op} \sim \|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_{op}$.

De façon analogue pour la norme ∞, si $x_1 \sim x_2 \sim \frac{\pi}{2}$ et $y_1 \sim y_2 \sim 0$ par exemple.

Exo 11

$$\begin{cases} 5x = 2\sin x + \cos y \\ 5y = \cos x + \sin 3y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos y \\ y = \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin 3y. \end{cases}$$

$$\iff (x,y) = f(x,y) \quad \text{avec} \quad f(x,y) = \Big(\overbrace{\frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos y}^{g(x,y)}, \overbrace{\frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin 3y}^{h(x,y)}\Big).$$

On veut montrer que f est une contraction. (pour la $\|\cdot\|_\infty$).

$$|g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)| = \left|\frac{2}{5}(\sin x_1 - \sin x_2) + \frac{1}{5}(\cos y_1 - \cos y_2)\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{5}|\sin x_1 - \sin x_2| + \frac{1}{5}|\cos y_1 - \cos y_2| \leq \frac{2}{5}|x_1 - x_2| + \frac{1}{5}|y_1 - y_2| \leq \frac{3}{5}\|(x_1-x_2, y_1-y_2)\|_\infty$$

$$|h(x_1,y_1) - h(x_2,y_2)| = \left|\frac{1}{5}(\cos x_1 - \cos x_2) + \frac{1}{5}(\sin(3y_1) - \sin(3y_2))\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{5}|\cos x_1 - \cos x_2| + \frac{1}{5}|\sin 3y_1 - \sin 3y_2| \leq \frac{1}{5}|x_1 - x_2| + \frac{3}{5}|y_1 - y_2| \leq \frac{4}{5}\|(x_1-x_2, y_1-y_2)\|_\infty$$

On en déduit que $\|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\|_\infty \leq \frac{4}{5}\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_\infty$ et que f est $\frac{4}{5}$-lipschitzienne, et donc contractante.

Comme $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ est complet, par le théorème du point fixe de Banach, $\exists!\,(x,y) = f(x,y)$ et donc le système admet une unique solution.

Rmq: En vue de l'exercice 10, on a considéré la norme ∞ car $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |||A|||_\infty = \frac{4}{5}$. Comme $|||A|||_1 = |||{}^tA|||_\infty = |||A|||_\infty = \frac{4}{5} < 1$ et $|||A|||_2 = \rho(A) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} < 1$, on aurait pu utiliser aussi $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$.